# الجامعة المفتوحة

# تقنية معلومات

# منهج

# التحليل العددي

جامعة المنوفية
طرابلس

تحليل عددي

2015/10/11
أ/ محمد ...

(1)

* المحاضرة الأولى:

- الأخطاء: Errors: تنتج الأخطاء نتيجة لعدم حصولنا على القيمة الحقيقية فالخطأ من وجهة النظر الرياضية للعدد ما هو الفرق بين القيمة المحسوبة والقيمة الدقيقة (الحقيقية).

- مصادر الأخطاء:

1) خطأ النموذج الرياضي: قد يحدث في عالمنا الواقعي بأن بعض من مشاكلنا التي نصادفها قد يصعب علينا وضعها في نموذج نستطيع التعامل معه بصورة رياضية، وحتى لو افترضنا وضعه على صورة نموذج رياضي في بعض الحالات فقد يكون حل هذا النموذج مستحيلاً، الأمر الذي يتطلب الاستعانة بنموذج تقريبي مؤدياً إلى إستحداث خطأ في الحلول.

2) الخطأ البشري: هنالك بعض من الأخطاء ناتجة عن الأرقام من حيث كتابتها أو إجراء العمليات الحسابية عليها ففي الحاسبات الآلية قد تحدث أخطاء نتيجة عمليات الإدخال وقد تكون تكون هنالك أخطاء البرنامج نفسه وهي أخطاء قد يصعب اكتشافها بسهولة.

3) خطأ الآلة: مهما كانت دقة صناعة الآلة فهنالك احتمال وجود أخطاء نتيجة إستعمالها في أدوات القياس مثلاً مهما كانت دقة قياسها غير محدودة كالموازين وأجهزة قياس الضغط الجوي مثلاً ... وغيرها فجهاز الحاسب الآلي لا يستطيع أن يخزن كل الأرقام بدقة متناهية. فالعدد ($\frac{1}{3} = 0.333...3$) لا يمكن تخزينه بصورة تامة بالنظام العشري حيث يتم تخزين جزء منه حسب قدرة الجهاز ونوعيته وحسب تصميم المخزن الداخلي للجهاز، الأمر الذي تترتب عليه إستحداث أخطاء نتيجة هذا التخزين نلخصها في الآتي:

(أ) خطأ التقريب: ينتج هذا النوع من الخطأ من أن عدد الخانات المعاصة
(طول الكلمة) ... [illegible]

* يمكن ايجاد قيمة الدالة كثيرة الحدود عند نقطة بطريقة هورنر (Horner's Method) :

ان الدالة كثيرة الحدود

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

يمكن التعبير عنها بالصورة التالية

$$P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + b_0 \longrightarrow ①$$

حيث $Q(x)$ كثيرة حدود كالآتي

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

وإذا كانت $x = x_0$ إذاً من العلاقة ① ينتج لنا

$$P(x_0) = (x_0 - x_0)\, Q(x_0) + b_0 = b_0$$

حيث $b_0$ تسمى بالحد الباقي وهي قيمة الدالة كثيرة الحدود $P(x)$ عند النقطة $x = x_0$ .

ومن العلاقة ① نجد أن

$$P(x) = x\,Q(x) - x_0\,Q(x) + b_0$$

وبأخذ المشتقة الأولى للمتغير $x$ حيث $x$ ... ينتج لنا

$$P'(x) = x\,Q'(x) + Q(x) - x_0\,Q'(x) + 0$$

$$= Q(x) + (x - x_0)\,Q'(x)$$

$$\therefore\ P'(x_0) = Q(x_0) \longrightarrow ②$$

ومن طريقة نيوتن رافسون لتقريب الجذور $P(x) = 0$ نجد أن

$$x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})} \; ; \; n \geq 1 \longrightarrow ③$$

أعداد صحيحة

حيث $n$ تعرف عدد جذور الدالة كثيرة الحدود أي أنه إذا كان المطلوب القيمة التقريبية للجذر $x_1$ فإن الجذر التقريبي من العلاقة يكتب كالآتي :

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{\cdots}$$

المحدود بالجهاز يترتب عليه خطأ هو ما نسميه بالخطأ المقرب.

(ii) خطأ البتر: ينتج عادة هذا النوع من الخطأ عند الحاجة إلى استخدام نموذج يستدعي فيه الاستغناء عن بعض من حدود مجموعة لانهائية كالمتسلسلات.

مثلاً: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

قد نستخدم عشرة حدود فقط في هذه المتسلسلة لتعريف الدالة $e^x$ : $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^9}{9!}$

يكون في هذه الحالة مقدار الخطأ هو مجموع الحدود الباقية (المبتورة) من المتسلسلة اللانهائية وهي: $E = \sum_{k=10}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

- يمكن تلخيص الأخطاء الناتجة عن الحاسب الآلي فيما عدا أخطاء الإدخال والإخراج كالآتي: 1- أخطاء الجريان الفوقي والتحتي: Over flow-under flow Error: يحدث هذا النوع من الخطأ نتيجة العمليات الحسابية التي ينتج عنها أعداد كبيرة جداً أو صغيرة جداً لا يمكن تخزينها بالجهاز ولتفادي هذا النوع من الأخطاء يجب أن نتحكم في العمليات الحسابية وذلك بحصر نتائج هذه العمليات بالقرب من $(\pm 1)$ أي نجعل مميز الأس قريباً من الصفر فعلى سبيل المثال إذا كانت قيم المتغيرات $a,b,c$ معروفة فيمكن حساب العملية الحسابية $(\frac{ab}{c})$ كالآتي:

$$\frac{ab}{c} = \begin{cases} (ab)/c & \text{إذا كانت إحدى القيمتين } |a|, |b| \text{ كبيرة والباقي صغير} \\ a(b/c) & \text{إذا كانت القيمتان } |c|, |b| \text{ كبيرتان أو صغيرتان} \\ b(a/c) & \text{" " " } |a|, |c| \text{ " "} \end{cases}$$

2- الخطأ الدائري المقرب: وهو الخطأ الناتج عن عدم استخدام كل الثنائيات للعدد الثنائي المخزن وذلك عندما تكون العمليات الحسابية قد أجريت على جهاز للدقة المفردة وهو ناتج من مجموعة مؤثرات منها: (1) الخطأ الدائري المقرب وهو نتيجة تخزين العدد الثنائي المثل...

لا يمكن تخزينها بكاملها في جهاز حروف الكسري مكون من
(n ثنائية) فالعدد العشري (0.1) عند تمثيله بالنظام
الثنائي يكون :

$$(0.1)_{10} = (0.000110011001100\ldots)_2$$
$$= (0.1100110011 0\ldots)_2 \times 2^{-3}$$

هنا الجزء الكسري غير منتهي وبالتالي لا يمكن تخزينه بالتمام
يجب أن نبتر العدد حسب حجم الكلمة بالحاسب الآلي محدثا
بذلك نوع من الخطأ أثر تخزينه بالجهاز خلاف الأخطاء الناتجة
عن العمليات الحسابية بالنسبة لهذا العدد
لتقليل هذا النوع من الأخطاء الوراثية يجب أن تقرب الأعداد
العشرية أي أكبر عدد ممكن من المنازل الهامة عند عملية إدخالها
لتخزينها بالجهاز

(ب) الخطأ التقريبي المتوالد: ينتج هذا النوع من الخطأ من العمليات
الحسابية بالجهاز للأعداد المخزنة حسب الدقة المفردة بالجهاز
لنفرض بأن لدينا جهازا حاسبا آليا حروف الكسري
للدقة المفردة هو أربعة منازل هامة (4S) للأساس
مثل ($M=10$) (حاسبة جيب بسيطة) أي أنه يقرب
العدد الحقيقي $X_e$ إلى أربعة منازل هامة ويقوم بتخزين
العدد المقرب $X_a$ كالآتي :

$$X_a = fL(X_e) = \pm 0.a_1 a_2 a_3 a_4 * 10^{e_1} \quad , \quad a_1 \neq 0$$
$$X_a \neq 0 \quad ; \quad e_1 \in (-9, +9)$$

فإذا كانت الأعداد المدخلة للحاسب هي

$b = 5678.3$ $\quad$ $C = 0.00413860$ $\quad$ $d = 0.40177312$

$g = 0.40187710$ $\quad$ $h = 60.0$

يكون تخزين هذه الأعداد بالجهاز المذكور والحاسبة على الصورة
التالية :

$b_a = 0.5678 \times 10^4$ $\quad$ $C_a = 0.4139 \times 10^{-2}$

$d_a = 0.4018 \times 10^0$ $\quad$ $g_a = 0.4019 \times 10^0$ $\quad$ $h_a = 0.6000 \times 10^2$

فإذا رمزنا للعمليات الحسابية المنجزة بالجهاز بالرموز

وبالتالي فطرح عددين قريبين من بعضهما يعطي أخطاء بالمنازل العشرية الأولى ولا شيء بالمنازل الباقية ولهذه الأسباب هذا النوع من ~~الأخطاء~~ الخطأ المترتب يطلق عليه بخطأ فقدان المنازل الهامة.

ملاحظة: هنالك بعض الطرق للتقليل من هذه الأنواع من الأخطاء أو تفاديها في بعض الحالات وذلك بأن نحسب التعابير الرياضية بأقل عدد ممكن من العمليات الحسابية سواء بتحوير الطريقة أو باستخدام طرق أخرى أكثر ملاءمة.

* يمكن ايجاد قيمة كثيرة الحدود عند نقطة بطريقة هورنر (Horner's Mothod)

ان كثيرة الحدود

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

يمكن التعبير عنها بالصورة التالية

$$P(x) = (x - x_0)\, Q(x) + b_0 \longrightarrow (1)$$

حيث $Q(x)$ كثيرة حدود كالآتي

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$$

واذا اخذنا $x = x_0$ في العلاقة (1) ينتج لنا

$$P(x_0) = (x_0 - x_0)\, Q(x_0) + b_0 = b_0$$

حيث $b_0$ تسمى بالحد الباقي وهو قيمة كثيرة الحدود $P(x)$ عند النقطة $x = x_0$

ومن العلاقة (1) نحصل على

$$P(x) = x\,Q(x) - x_0\,Q(x) + b_0$$

وبأخذ المشتقة الأولى للمتغير $x$ [illegible]
ينتج لنا

$$P'(x) = x\,Q'(x) + Q(x) - x_0\,Q'(x) + 0$$
$$= Q(x) + (x - x_0)\,Q'(x)$$

$$\therefore\ P'(x_0) = Q(x_0) \longrightarrow (2)$$

ومن طريقة نيوتن رافسون لتقريب الجذر $P(x) = 0$
نحصل على

$$x_n = x_{n-1} - \frac{P(x_{n-1})}{P'(x_{n-1})} \quad ; \quad n \geq 1 \longrightarrow (3)$$

(أعداد صحيحة)

حيث $n$ تمثل عدد صحيح كثيرة الحدود أي انه اذا قمنا [illegible]
بالطرق التقريبية للجذر $x_1$ [illegible]
[illegible]

$$x_1 = x_0 - \frac{P(x_0)}{[illegible]}$$

5/10/11

* المحاضرة الثالثة

* إيجاد قيمة كثيرة الحدود عند نقطة معينة :-

الدالة التي على الصورة

$$P_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

عندما $a_n \neq 0$ ، $a_0, a_1, \dots, a_n$ ثوابت

تسمى كثيرة حدود من الدرجة $n$ في $x$

مثال : إذا كانت

$$P(x) = x^5 - 8.6x^4 + 38.782x^3 + 17.25x^2 - 4.5927x + 10.5$$

احسب قيمة كثيرة الحدود عند النقطة $x = 2.5$ مستخدماً (4S)

(أربعة منازل هامة) ؟

الحل : إذا عوضنا المعادلة بالطريقة العادية $p(2.5)$

ذات أربعة منازل هامة يكون $p(2.5) = 474.7$ (4S)

نلاحظ هنا إننا أجرينا خمس عمليات (جمع وطرح)

و 18 عملية (ضرب).

ولكن يمكن أن نستخدم طريقة الضرب المتداخلة للدوال من

عمليات الضرب وتفادي تقارب المنازل العالية بقدر الإمكان

$$p(x) = ((((x - 8.6)x + 38.782)x + 17.25)x - 4.5927)x + 10.5$$

وبهذه الطريقة يكون هناك خمس عمليات (جمع وطرح) و

أربعة عمليات (ضرب) فقط.

$\therefore p(2.5) = 474.5$ (4S)

مقارنة بالقيمة الحقيقية $(p(2.5) - 474.51825)$ هذه ذات

أربعة منازل هامة دقيقة بينما بالطريقة الأولى ثلاثة

منازل هامة دقيقة فقط.

وبصورة عامة : بالنسبة لكثيرة الحدود من الدرجة $n$ نكتب

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n \quad , \quad a_n \neq 0$$

يمكن حساب قيمتها عند أي نقطة $x$ باستخدام طريقة الضرب

المتداخل :

وحيث أن $P'(2) = Q(2)$ فعلينا حساب $Q(2)$

$\therefore Q(x) = 16x^3 - 8x^2 - 11x - 2$

| $x = 2$ | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 16 | -8 | -11 | -2 |
| | ↓ | 32 | 48 | 74 |
| | 16 | 24 | 37 | $72 = b_0$ |

$\therefore P'(2) = Q(2) = 72$

$$\therefore x_1 = 2 - \frac{2}{72} \approx 1.97$$

* متسلسلة تايلور:

الصورة العامة لهذه المتسلسلة عند النقطة $x = a$ هي

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \dots$$

حيث $f$ دالة متصلة وقابلة للتفاضل في الفترة $[a, b]$ وان $R$ حيث $|x-a| = R$ يسمى بنصف قطر التقارب.

وعندما تكون $a = 0$ أي عندما تكون متسلسلة تايلور حول $x = 0$ تسمى متسلسلة ماكلورين وتأخذ الصورة

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \dots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}(0) + \dots$$

* نظرية تايلور: لتكن الدالة $f(x)$ ومشتقاتها النونية موجودة ومتصلة في الفترة بين $x_0, x$ عندئذٍ تعطى الدالة $f(x)$ بالعلاقة

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x-x_0)^n}{n!} + R_{n+1}$$

حيث

$$R_{n+1} = f^{(n+1)}(\xi)\frac{(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)!}$$

وان $\xi$ تقع بين $x, x_0$.

من نظرية المتبقي نلاحظ أن الخطأ عند رتبة المتسلسلة عند n
من الحدود قدره $|R_{n+1}|$ حيث

$$|R_{n+1}| \leq \left|\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\right|_{max} \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}$$

وإن $\left|\frac{d^{n+1}f}{dx^{n+1}}\right|_{max}$ تمثل أكبر قيمة للمشتقة n+1 للدالة f

في الفترة من $x_0$ إلى $x$

* كيفية نشر متسلسلة تايلور :-

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + O(x-a)^3$$

أي إننا أهملنا حدود المتسلسلة من الرابع فأعلى
فإن الخطأ يكون من الرتبة الثالثة أي $(x-a)^3$
ويكتب $O(x-a)^3$ .

ملاحظة :

$$O(x-a)^{n+1} < O(x-a)^n$$

مثال :- $f(x) = \sin x$ وباعتبار متسلسلة تايلور نشر حول $x=0$

$$\sin x = \sin(0) + x\cos(0) - \frac{x^2}{2!}\sin(0) - \frac{x^3}{3!}\cos(0) + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

$$= x - \frac{x^3}{3!} + O(x)^4 = x - \frac{x^3}{3!} + O(x)^5$$

لأن معامل الحد الذي يحتوي $x^4$ صفر

I

* تمرين للمناقشة :

احسب تقريب $\frac{1}{1-x}$ حتى $O(x)^4$ وذلك عندما $x = 0.2$ ؟ ثم قدر مقدار الخطأ ؟

الحل :

$$f(x) = (1-x)^{-1}$$

$$f'(x) = (1-x)^{-2}$$

$$f''(x) = 2(1-x)^{-3}$$

$$f'''(x) = 6(1-x)^{-4}$$

وبوضع $x = 0$ ينتج

$$f(0) = 1 \; , \; f'(0) = 1 \; , \; f''(0) = 2 \; , \; f'''(0) = 6$$

وبالتالي ينتج

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + O(x)^4$$

$$= 1 + x + \frac{x^2}{2}(2) + \frac{x^3}{6}(6) + O(x)^4$$

$$= 1 + x + x^2 + x^3 + O(x)^4$$

$$\therefore f(0.2) = 1 + 0.2 + (0.2)^2 + (0.2)^3 = 1.248$$

ولتقدير الخطأ نطبق نظرية الباقي لتايلور

$$f^{(4)}(x) = 24(1-x)^{-5}$$

$$f^{(4)}(x)\Big|_{max} = 24(1-0.2)^{-5} = 73.24$$

في الفترة $[0, 0.2]$ وبذلك يكون

$$|R_4| \leq \frac{(0.2)^4}{4!}(73.24) = 0.004883$$

ولكن الخطأ الحقيقي هنا هو

$$E = \frac{1}{1-0.2} - 1.248 = 0.002$$

مثال : أوجد $e^{0.5}$ إلى $O(0.5)^3$ ؟

الحل : حيث أن الخطأ من الرتبة $O(x)^3$ عندئذ نأخذ $e^x$ على الصورة

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + O(x)^3$$

وحيث $x = 0.5$ تكون $e^{0.5}$ مساوية لـ $e^{0.5} = 1.625$

ولمعرفة مقدار الخطأ نطبق في نظرية الباقي كالآتي :

$$|R_{n+1}| \le \left| \frac{d^3 e}{dx^3} \right|_{max} \frac{(0.5)^3}{3!} = 0.034348$$

أي أن الخطأ لا يجاوز العدد $0.034348$ ، ولكن الخطأ الحقيقي يساوي $1.625 - e^{0.5} = 0.0237$

وبالمقارنة نجد أن تقدير الخطأ باستخدام الباقي (الخطأ) أعطى قيمة ليست بعيدة عن قيمة الخطأ الحقيقي .

ولكي نحصل على تقدير أفضل للخطأ يلزم أن نرفع الرتبة أعلى في الخطأ أي أن نأخذ عدد من حدود المتسلسلة بعد العدد من الحدود .

مثال : احسب $\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$ حتى $O\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$

الحل :

$$\therefore \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} - \frac{(\pi/6)^3}{3!} + O\left(\frac{\pi}{6}\right)^5$$

$$= 0.4996742 + O(\pi/6)^5 = 0.4998175$$

* ملاحظة هامة : في مواضيع التحليل العددي يجب حساب الزوايا بالتقدير الستيني أي الزاوية نصف قطرية (rad) .

## الفروق المحدودة

تعتبر من أهم الأساليب المستخدمة في الطرق العددية ويتم

أنواع الفروق الأكثر استخداما

(1) الفروق الأمامية (2) الفروق الخلفية (3) الفروق المركزية

تعريف: الفرق الأمامي الأول للدالة $f(x)$ عند $x = x_j$ يعرف كالآتي: $f(x_{j+1}) - f(x_j)$

مع مراعاة الآتي: (i) يستخدم الرمز $\Delta$ للتعبير عن الفرق الأمامي الأول للدالة $f(x)$ حيث

$$\Delta f(x_j) = f(x_{j+1}) - f(x_j) \longrightarrow [1]$$

أو يتم التعبير عن الفرق الأمامي الأول بالصورة

$$\Delta f_j = f_{j+1} - f_j \longrightarrow [2]$$

كما يتم التعبير عن الفرق الأمامي الأول بالصورة

$$\Delta f(x_j) = f(x_j + h) - f(x_j) \longrightarrow [3]$$

فإذا تم استبدال $x_j$ بالمتغير $x$ فإننا نحصل على

$$\Delta f(x) = f(x+h) - f(x) \longrightarrow [4]$$

حيث العلاقة [4] هي عبارة عن تعريف المؤثر $\Delta$.

(ii) الفرق الأمامي ذو المرتبة $K$ يتم الحصول عليه كالآتي

$$\Delta^K f(x_j) = \Delta(\Delta^{K-1} f(x_j)) \longrightarrow [5]$$

حيث $K \geq 2$ ، $\Delta' = \Delta$

بمعنى: $\Delta^2 f_j$ يعبر عن فروق المرتبة الثانية الأمامية

$\Delta^3 f_j$ " " " " الثالثة "

$\Delta^4 f_j$ " " " " الرابعة "

... وهكذا حتى $\Delta^n f_j$ للتعبير عن فروق المرتبة النونية الأمامية

نوجد الآتي $\Delta^2 f(x_j) , \Delta^3 f(x_j)$

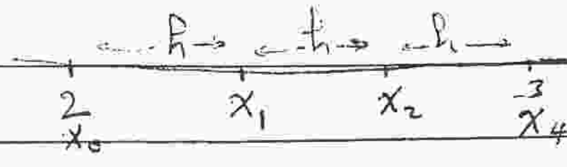
$$\therefore \Delta^2 f(x_j) = \Delta(\Delta f_j) = \Delta(f_{j+1} - f_j)$$
$$= \Delta f_{j+1} - \Delta f_j$$
$$= [f_{j+2} - f_{j+1}] - [f_{j+1} - f_j]$$
$$= f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j$$

$$\Delta^3 f(x_j) = \Delta^3 f_j = \Delta(\Delta^2 f_j)$$
$$= \Delta(f_{j+2} - 2f_{j+1} + f_j)$$
$$= \Delta f_{j+2} - 2\Delta f_{j+1} + \Delta f_j$$
$$= [f_{j+3} - f_{j+2}] - 2[f_{j+2} - f_{j+1}] + [f_{j+1} - f_j]$$
$$= f_{j+3} - 3f_{j+2} + 3f_{j+1} - f_j$$

ملاحظة: من خواص الفروق الموجودة أنها تعتمد على أساس أن النقاط تكون متساوية البعد أي $x_{j+1} - x_j = h$
بمعنى أن الفرق بين أي نقطتين متتاليتين يكون ثابت.
ولتوضيح ذلك إذا اعتبر $x = 2(0.2)3$ يعني الآتي

$$2 \le x \le 3 \quad , \quad h = 0.2$$

$$\therefore x_0 = 2$$




$$x_1 = x_0 + h = 2 + 0.2 = 2.2$$
$$x_2 = x_1 + h = 2.2 + 0.2 = 2.4$$
$$x_2 = x_0 + h + h = x_0 + 2h = 2 + 0.4 = 2.4$$
$$x_3 = x_2 + h = x_0 + 2h + h = x_0 + 3h = 2 + 0.6 = 2.6$$
$$x_4 = x_3 + h = x_0 + 4h = 2.8$$
$$x_5 = x_4 + h = x_0 + 5h = 3.0$$

وبالمتابعة نجد أن

$$x_i = x_0 + ih \quad , \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n$$

**مثال:** كون جدول الفروق الأمامية للدالة $f(x)=3x^4-2x^3+x-1$

حيث $x=1(1)6$

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ | $\Delta^5 f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | | | |
| | | 32 | | | | |
| 2 | 33 | | 126 | | | |
| | | 158 | | 168 | | |
| 3 | 191 | | 294 | | 72 | |
| | | 452 | | 240 | | 0 |
| 4 | 643 | | 534 | | 72 | |
| | | 986 | | 312 | | |
| 5 | 1629 | | 846 | | | |
| | | 1832 | | | | |
| 6 | 3461 | | | | | |

من الجدول السابق نلاحظ أن

$f(x)$ دالة كثيرة حدود من الدرجة 4 فإن

$\Delta^4 f$ يكون مقدار ثابت وإن $\Delta^{4+1} f=\Delta^5 f$ يساوي صفر.

**مثال:** كون جدول الفروق الأمامية لكثيرة الحدود $p(x)=x^3-3x^2+2x+1$

حيث $x=0(0.2)1$ ثم أوجد قيمة $k!\,h^k a_k$ حيث

$k$ درجة كثيرة الحدود. وماذا تلاحظ؟

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ | $\Delta^4 f$ | $\Delta^5 f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1 | | | | | |
| | | 0.288 | | | | |
| 0.2 | 1.288 | | -0.192 | | | |
| | | 0.096 | | 0.048 | | |
| 0.4 | 1.384 | | -0.0144 | | 0 | |
| | | -0.048 | | 0.048 | | 0 |
| 0.6 | 1.336 | | -0.096 | | 0 | |
| | | -0.144 | | 0.048 | | |
| 0.8 | 1.192 | | -0.048 | | | |
| | | -0.192 | | | | |
| 1.0 | 1 | | | | | |

لإيجاد قيمة $k!\,h^k a_k$

$\because k=3,\ h=0.2,\ a_3=1$

$3!\,(0.2)^3(1)=0.048=\Delta^3 f$

$\therefore k!\,h^k a_k=\Delta^k f$ #

11

كوّن جدول الفروق الأمامية للدالة $f(x) = x^3$ حيث $x = 1(0.1)1.3$

ثم أوجد قيمة $f_4 = ?$

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | | | |
| | | 0.331 | | |
| 1.1 | 1.331 | | 0.066 | |
| | | 0.397 | | 0.006 |
| 1.2 | 1.728 | | 0.072 | |
| | | 0.469 | | |
| 1.3 | 2.197 | | | |

من الجدول يمكن حساب $f_4$ كالآتي

$$f_4 = f_3 + \Delta f_3 + \Delta^2 f_3 + \Delta^3 f_3 = 2.197 + 0.469 + 0.072 + 0.006$$

$$= 2.7444$$

* تمارين للمناقشة

س1/ إذا كانت المعلومات أدناه تمثل متعددة حدود فأوجد درجتها

| $x$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0.5 | 8 | 35.5 | 95. | 198.5 |

س2/ أوجد باستخدام الفروق الأمامية متعددة الحدود من الدرجة الثالثة التي تمر بالنقاط التالية

$(0,-1), (1,-3), (2,1), (3,17)$.

2010/11/8

2010/11/22 م

* تابع الفروق المحدودة

الفروق الخلفية :

تعريف : الفرق الخلفي الأول للدالة $f(x)$ عند $x = x_j$ ويحسب كالآتي

$$f(x_j) - f(x_{j-1})$$

مع مراعاة أن الرمز $\nabla$ يستخدم للتعبير عن الفرق الخلفي الأول للدالة $f(x)$ حيث أن

$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_{j-1})$$

$$\text{or } \nabla f_j = f_j - f_{j-1}$$

ويتم التعبير أيضاً عن الفرق الخلفي الأول كالآتي

$$\nabla f(x_j) = f(x_j) - f(x_j - h)$$

وعندما $x = x_j$ تكون

$$\nabla f(x) = f(x) - f(x - h)$$

وهو تعريف المؤثر $\nabla$ (نابلا)

ملاحظة : الفرق الخلفي ذو الرتبة K يتم الحصول عليه من العلاقة

$$\nabla^K f(x_j) = \nabla(\nabla^{K-1} f(x_j))$$

حيث $\nabla^1 = \nabla$ وأن $K \geq 2$

ملاحظة :

$$\because \nabla f_j = f_j - f_{j-1}$$

$$\therefore \nabla^2 f_j = \nabla(f_j - f_{j-1}) = \nabla f_j - \nabla f_{j-1}$$

$$= f_j - f_{j-1} - f_{j-1} + f_{j-2} = f_j - 2f_{j-1} + f_{j-2}$$

وهكذا يتم حساب $\nabla^3 f_j$ ...

* الفرق المركزي :

تعريف : الفرق المركزي للدالة $f(x)$ عند $x = x_j$ يعرف كالآتي :

$$f(x_{j+\frac{1}{2}}) - f(x_{j-\frac{1}{2}})$$

ويرمز له بالرمز $\delta$ للتعبير عن الفرق المركزي الأول للدالة $f(x)$ حيث

$$\delta f(x_j) \quad f(x_{j+\frac{1}{2}}) - f(x_{j-\frac{1}{2}})$$

or $$\delta f_j = f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}$$

وكذلك يتم التعبير عن الفرق المركزي الأول كالآتي

$$\delta f(x_j) = f(x_j + h) - f(x_j - h)$$

وعندما تكون $x = x_j$

$$\delta f(x) = f(x + h) - f(x - h)$$

وهو تعريف المؤثر $\delta$

* ملاحظة : الفرق المركزي من المرتبة $K$ يتم الحصول عليه من العلاقة :

$$\delta^K f(x_j) = \delta(\delta^{K-1} f(x_j))$$

حيث $\delta^1 = \delta$ , $K \geq 2$

* مثال : أوجد قيمة $\delta^3 f(x_j)$ ؟

$$\therefore \delta^3 f(x_j) = \delta^3 f_j = \delta^2(\delta f_j)$$

$$= \delta^2(f_{j+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}) = \delta(\delta f_{j+\frac{1}{2}} - \delta f_{j-\frac{1}{2}})$$

$$= f_{j+\frac{3}{2}} - 3f_{j+\frac{1}{2}} + 3f_{j-\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{3}{2}}$$

س/ اثبت ان : $\Delta^2 f_j + \nabla^2 f_j + \delta^2 f_j = \nabla(f_{j+2} - f_{j-1})$ ؟

## جدول المؤثرات $\nabla$ ، $\Delta$ ، $\delta$ :

### ① جدول الفروق الأمامية $\Delta$

| $j$ | $x$ | $f_j(x)$ | $\Delta f_j$ | $\Delta^2 f_j$ | $\Delta^3 f_j$ | $\Delta^4 f$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | $f_0$ | | | | |
| | | | $f_1 - f_0 = \Delta f_0$ | | | |
| 1 | $x_1$ | $f_1$ | | $\Delta f_1 - \Delta f_0 = \Delta^2 f_0$ | | |
| | | | $f_2 - f_1 = \Delta f_1$ | | $\Delta^2 f_1 - \Delta^2 f_0 = \Delta^3 f_0$ | |
| 2 | $x_2$ | $f_2$ | | $\Delta f_2 - \Delta f_1 = \Delta^2 f_1$ | | $\Delta^3 f - \Delta^3 f_0$ |
| | | | $f_3 - f_2 = \Delta f_2$ | | $\Delta^2 f_2 - \Delta^2 f_1 = \Delta^3 f_1$ | |
| 3 | $x_3$ | $f_3$ | | $\Delta f_3 - \Delta f_2 = \Delta^2 f_2$ | | |
| | | | $f_4 - f_3 = \Delta f_3$ | | | |
| 4 | $x_4$ | $f_4$ | | | | |

### ② جدول الفروق الخلفية $\nabla$

| $j$ | $x$ | $f_j(x)$ | $\nabla f_j$ | $\nabla^2 f_j$ | $\nabla^3 f_j$ | $\nabla^4 f_j$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | $f_0$ | | | | |
| | | | $f_1 - f_0 = \nabla f_1$ | | | |
| 1 | $x_1$ | $f_1$ | | $\nabla f_2 - \nabla f_1 = \nabla^2 f_2$ | | |
| | | | $f_2 - f_1 = \nabla f_2$ | | $\nabla^2 f_3 - \nabla^2 f_2 = \nabla^3 f_3$ | |
| 2 | $x_2$ | $f_2$ | | $\nabla f_3 - \nabla f_2 = \nabla^2 f_3$ | | $\nabla^3 f_4 - \nabla^3 f_3 = \nabla^4 f_4$ |
| | | | $f_3 - f_2 = \nabla f_3$ | | $\nabla^2 f_4 - \nabla^2 f_3 = \nabla^3 f_4$ | |
| 3 | $x_3$ | $f_3$ | | $\nabla f_4 - \nabla f_3 = \nabla^2 f_4$ | | |
| | | | $f_4 - f_3 = \nabla f_4$ | | | |
| 4 | $x_4$ | $f_4$ | | | | |

### ③ جدول الفروق المركزية $\delta$

| $j$ | $x$ | $f_j(x)$ | $\delta f_j$ | $\delta^2 f_j$ | $\delta^3 f_j$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | $x_0$ | $f_0$ | | | |
| | | | $f_1 - f_0 = \delta f_{1/2}$ | | |
| 1 | $x_1$ | $f_1$ | | $\delta f_{3/2} - \delta f_{1/2} = \delta^2 f_1$ | |
| | | | $f_2 - f_1 = \delta f_{3/2}$ | | $\delta^2 f_2 - \delta^2 f_1 = \delta^3 f_{3/2}$ |
| 2 | $x_2$ | $f_2$ | | $\delta f_{5/2} - \delta f_{3/2} = \delta^2 f_2$ | |
| | | | $f_3 - f_2 = \delta f_{5/2}$ | | $\delta^2 f_3 - \delta^2 f_2 = \delta^3 f_{5/2}$ |
| 3 | $x_3$ | $f_3$ | | $\delta f_{7/2} - \delta f_{5/2} = \delta^2 f_3$ | |
| | | | $f_4 - f_3 = \delta f_{7/2}$ | | |
| 4 | $x_4$ | $f_4$ | | | |

نلاحظ انه في الجدول ① $\Delta$ ان الاعداد تنزل بخط مائل ساقط ،
وفي الجدول ② $\nabla$ ان الاعداد لأعلى « الميل موجب ،
وفي الجدول ③ $\delta$ ان الاعداد افقي « الميل = صفر ،

* ملاحظة: من دراسة الجداول الثلاثة السابقة نجد أن

$$f_{n+1} - f_n = \Delta f_n = \nabla f_{n+1} = \delta f_{n+\frac{1}{2}}$$

فمثلا $n=1$ نجد أن

$$f_2 - f_1 = \Delta f_1$$
$$= \nabla f_2$$
$$= \delta f_{3/2}$$

* الفروق المقسومة:

تعريف: إذا كانت للدالة $f(x)$ القيم $f(x_j)$ في فئة النقاط $\{x_j\}$ فإن الفرق المقسوم من الرتبة الأولى بين $x_i, x_j$ يعرف كالآتي:

$$f[x_i, x_j] = \frac{f[x_j] - f[x_i]}{x_j - x_i}$$

ملاحظة: (1) التعبير $f[x_j] = f(x_j)$ ونقدم استخدام الأقواس [ ] للتعريف للفرق المقسوم.

(2) لا يعتمد هذا الفرق على طول الخطوة أي كانت بين $x_i, x_j$ متساوية أم لا.

(3) من التعريف نجد أن $f[x_i, x_j] = f[x_j, x_i]$ أي أن الترتيب بين النقاط لا يهم.

(4) المستقيم الواصل بين $(x_i, f(x_i))$ ، $(x_j, f(x_j))$ يصنع زاوية $\theta$ مع الأفقي فظلها $\tan\theta$ عبارة عن $f[x_i, x_j]$

(5) الحالة العامة للفروق المقسومة:

$$f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k}] = \frac{f[x_{j+1}, x_{j+2}, \dots, x_{j+k}] - f[x_j, x_{j+1}, \dots, x_{j+k-1}]}{x_{j+k} - x_j}$$

**مثال**: إذا كان $f(x) = 6x^3 - 2x^2 - x + 1$ أوجد

$f[2, 0, 1]$ , $f[1, 2, 0, 3]$

(16) (6)

تحليل عددي .. 2010/11/29 م

* العلاقة بين الفروق المحدودة والمقسمة :-

$$f[x_j, x_{j+1}, \ldots, x_{j+k}] = \frac{1}{k!}\frac{\Delta^k}{h^k} f_j$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{\nabla^k}{h^k} f_{j+k}$$

$$= \frac{1}{k!}\frac{\delta^k}{h^k} f_{j+\frac{k}{2}}$$

* حل المعادلات بالطرق العددية :-

إيجاد قيمة المعادلة ومتغيراتها في تلك المعادلة أي البحث عن جذر وجذور المعادلة بالطرق التحليلية المختلفة ولكن نصادف في بعض الأحيان معادلة يصعب حلها باستخدام تلك الطرق أو يكون الحل على درجة عالية من التعقيد مثل المعادلات الآتية :-

$$x - 3\sin x = 0$$

$$8.2x^5 + 2.3x + 2.7x^3 - 4x + 9.75 = 0$$

$$e^x - \tan(\sin x) + 2x^2 + x = 0$$

$$\ln(x+8) - 9x^7 + e^{\cos x} = 9$$

... وغيرها من المعادلات الصعبة.

لذلك نلجأ إلى استعمال بعض الطرق العددية لإيجاد التقريب العددي لجذر المعادلة $f(x)=0$ مع ملاحظة إن جذور المعادلة تعتمد على درجة المعادلة فإذا كانت درجة المعادلة هي 3 فذلك يعني أن للمعادلة 3 جذور وأي حلول.

وسوف ندرس بعض الطرق العددية مثل

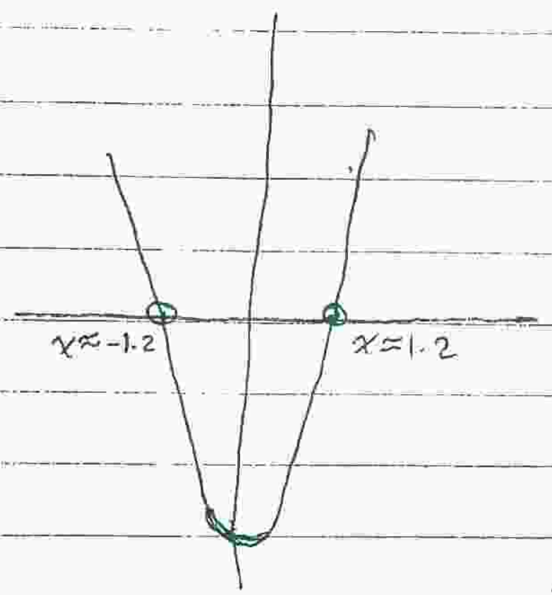
1- طريقة التكرار البسيط 2- التنصيف 3- نيوتن رافسون 4- القاطع

ومن التذكير بالملاحظة ان رسم منحنى الدالة f يؤدي الى معرفة القيمة التقريبية للجذور . وهي القيمة التي عندها يقطع منحنى الدالة محور السينات .

مثال : أوجد جذور المعادلة $2x^2-3=0$

الحل

$f(x)=2x^2-3$




| $x$ | $f(x)$ |
|---|---|
| 0 | -3 |
| 1 | -1 |
| -1 | -1 |
| 2 | 5 |
| -2 | 5 |

* طريقة التكرار البسيط :

المعادلة التي على الصورة $f(x)=0$ يمكن التعبير عنها بالصورة

$x=g(x) \rightarrow$ (1)

وذلك باستعمال بعض العمليات الحسابية ، ونلاحظ انه يوجد في بعض الأحيان أكثر من تعبير على الصورة $x=g(x)$

وأي قيمة تحقق $f(x)=0$ إذا كان وفقط إذا كان تحقق العلاقة (1)

ونظراً لأننا نبحث عن جذر المعادلة $f(x)=0$ باستعمال إحدى الصور $x=g(x)$ فإننا نحتاج إلى نقطة بداية ولتكن $P_0$ ثم باستعمال التعويض المتكرر نحصل على $P_1, P_2, \dots, P_n$ وذلك من العلاقة التالية :

$$(2) \leftarrow \begin{cases} P_n = g(P_{n-1}) , n=1,2,\dots \\ P_{n+1} = g(P_n) , n=0,1,2,\dots \end{cases}$$

العلاقة [2] تعرف بالتكرار البسيط باستقلاله بفضل على الجذر التقريبي للمعادلة $f(x)=0$

تعريف :- إذا كانت $g$ دالة معرفة على الفترة $[a,b]$

$g(p) = p$ لبعض $p \in [a,b]$

فإن الدالة $g$ لها نقطة ثابتة $p$ في $[a,b]$.

مثال :- الدالة $g(x) = x$ ، $0 \le x \le 1$

لها نقطة ثابتة لأي $x \in [0,1]$

$g(0.1) = 0.1$

$g(0.5) = 0.5$

مثال :- ارسم منحنى الدالة $g(x) = x - \sin \pi x$

ثم من الرسم أوجد النقطة الثابتة عندما $x \in [0,1]$

الحل :

| $x$ | $g(x)$ |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1/4 | -0.45 |
| 1/2 | -1/2 |
| 3/4 | 0.04 |
| 1 | 1 |

من الجدول واضح ان النقاط الثابتة هي 0، 1

$\therefore$ النقطة الثابتة هي $x=0$ ، $x=1$

لأن $g(0)=0$ ، $g(1)=1$

نظرية :- إذا كانت $g \in C[a,b]$ ~~$g(x) \in [a,b]$~~ + لكل $x \in [a,b]$، فإن $g$ لها نقطة ثابتة في $[a,b]$ بفرض $g'(x)$ لها وجود على الفترة $(a,b)$ وكان $|g'(x)| \le K < 1$ لكل $x \in [a,b]$ فإن $g$ لها نقطة ثابتة وحيدة $p$ في $[a,b]$

مثال : إذا كان $g(x)$ دالة بحيث $g(x)=\frac{x^2-1}{3}$ فأثبت أن g لها نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[-1,1]$ ثم أوجد تلك النقطة ؟

الحل $\because g(x)=\frac{x^2-1}{3} \Rightarrow g'(x)=\frac{2}{3}x$

$$|g'(x)|=|\tfrac{2}{3}x| \le \tfrac{2}{3} < 1$$

لكل $x\in[-1,1]$

$\therefore$ للدالة $g(x)$ نقطة ثابتة وحيدة في الفترة $[-1,1]$

ولنفرض أن النقطة الثابتة p ومن شروط النقطة الثابتة

أن $g(p)=p$

$$\therefore \frac{p^2-1}{3}=p \Rightarrow p^2-1=3p$$

$$\therefore p=\frac{3\pm\sqrt{13}}{2} \qquad \therefore p_1=3.3028$$
$$p_2=-0.3028$$

نستبعد $p_1$ لأن $p_1$ تقع خارج الفترة $[-1,1]$

$\therefore$ النقطة الثابتة الوحيدة هي $p_2=-0.3028$ .

ملاحظة : بالرجوع للعلاقة [2] نجد أن

$p_n=g(p_{n-1})\ ,\ n=1,2,\ldots$

فإذا فرضنا $p_0$ كقيمة تقريبية ابتدائية وتم توليد المتتالية $[p_n]_{n=0}^{\infty}$

فمنتظر تتقارب من p ، g دالة متصلة فإن

$$p=\lim_{n\to\infty}p_n=\lim_{n\to\infty}g(p_{n-1})=g[\lim_{n\to\infty}(p_{n-1})]=g(p)$$

عندها p تسمى حل للمعادلة $x=g(x)$ وبذلك تكون جذر من جذور المعادلة $f(x)=0$ وتسمى تلك الطريقة بطريقة تكرار النقطة الثابتة

**مثال:** المعادلة $x^3+4x^2-10=0$ لها جذر وحيد في الفترة $[1,2]$
أوجد ذلك الجذر باستخدام تكرار النقطة الثابتة عند $p_0=1.5$
الحل:
علينا التعبير عن المعادلة السابقة بصورة في شكل الصورة
$$x=g(x)$$
ومن هذه الصور

1) $\because x^3+4x^2-10=0$
$$x^3=10-4x^2$$
$$x^2=\frac{10}{x}-4x$$
$$x=\sqrt{\frac{10}{x}-4x}=\left(\frac{10}{x}-4x\right)^{1/2}=g_1(x)$$

ومن قانون التكرار نحصل على
$$P_n=g(P_{n-1})\ ;\ n=1,2,\dots\ ;\ P_0=1.5$$
وبالتعويض عن قيم $n$ نجد أن
$$P_1=g(P_0)=g(1.5)=\left(\frac{10}{1.5}-6\right)^{1/2}=0.8165$$
وبما أن الناتج لا يساوي 1.5 نستمر في الحل
$$P_2=g(P_1)=g(0.8165)=2.9969$$
وهكذا نستمر في الحل مرة أخرى
$$P_3=g(P_2)=g(2.9969)=\infty$$
هذا يعني أنه ليس من الضروري أن $x=g_1(x)$ تكون متقاربة ولذلك نبحث عن صيغة أخرى لـ $x$

2) $\because x^3+4x^2-10=0$
$$x^2(x+4)=10$$
$$x^2=\frac{10}{x+4}\implies x=\sqrt{\frac{10}{x+4}}=\left(\frac{10}{x+4}\right)^{1/2}=g_2(x)$$
$$P_1=g(P_0)=g(1.5)=1.34839973$$
نستمر في الحل إلى أن نحصل على 1.5

$p_2 = g(p_1) = 1.36737637$

$p_3 = g(p_2) = 1.36495701$

$p_4 = g(p_3) = 1.36526475$

$\ldots\ldots \quad p_8 = g(p_7) = 1.36523002$

$p_9 = g(p_8) = 1.36523001$

$p_{10} = g(p_9) = 1.36523001$

$\therefore \; p_9 = g(p_9) = 1.36523001$

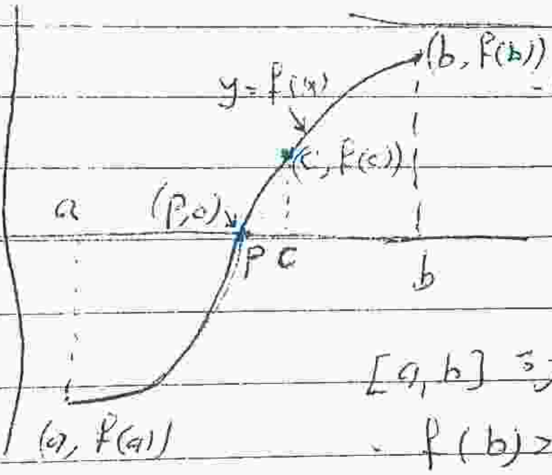
وهي النقطة الثابتة الوحيدة

∴ المتوالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ تقترب من النقطة $p_9$

i.e. $\lim_{n \to \infty} p_n = p_9 = 1.36523001$

∴ هي الجذر الوحيد في الفترة $[1,2]$ للدالة $f(x)$

② طريقة التنصيف :




الشكل المجاور يوضح منحنى الدالة $y=f(x)$ وهي دالة متصلة في الفترة $[a,b]$ ونلاحظ من الرسم أن $f(b)>0$ ، $f(a)<0$ وبذلك يكون $f(a)\cdot f(b)<0 \longrightarrow [1]$

ونلاحظ أن $(p,0)$ نقطة تقع على محور الدالة وبذلك يكون $x=p$ هو جذر للدالة $y=f(x)$ لأن $f(p)=0$

ونلاحظ أن $c$ نقطة تقع ما بين $a,b$ فإذا كانت $c=\frac{a+b}{2}$ فإن $c$ تقع في منتصف المسافة بين $a,b$ ونلاحظ أن

$f(a)\,f(b)<0$ ، $p \in [a,c]$

الطريقة التي تستعمل في إيجاد جذر المعادلة $f(x)=0$ تتطلب الاستمرار تعرف بطريقة التنصيف وتتلخص في الآتي:

① توفر شرط العلاقة [1] وهو لكي يكون للدالة $f$ صفر (جذر للمعادلة $f(x)=0$) في الفترة $[a,b]$ يجب أن يكون $f(a).f(b)<0$

② إيجاد $c=\frac{a+b}{2}$ ثم إيجاد قيمة $f(c)$ فإذا كان

(i) $f(a).f(c)<0$ فإن الجذر يقع في الفترة $[a,c]$

(ii) $f(c).f(b)<0$ فإن الجذر يقع في الفترة $[c,b]$

(iii) $f(c)=0$ فيعني هذا أن $x=p=c$

③ إذا تحقق (i) أو (ii) فإننا نستمر في إيجاد نقاط منتصف متتالية مع مراعاة العلاقة [1] في كل حالة حتى الوصول إلى فترة مناسبة تكون أقرب ما يمكن تقريبية للجذر $p$ ويتحقق (iii) أو بمعنى آخر تولد المتتالية $[c_n]_{n=0}^{\infty}$ التي تتقارب من الجذر $x=p$

أي $\lim_{n\to\infty} c_n = p$

تعريف: إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة و $p$ عدد $f(p)=0$ فإن $p$ يدعى جذر المعادلة ويقال له أيضاً صفر الدالة $f$

مثال: باستخدام طريقة التنصيف أوجد الجذر التكعيبي للعدد 5 مقرباً إلى 5 أرقام عشرية (5 d.p)

الحل:

$$x=\sqrt[3]{5}=5^{1/3}$$

$$x^3=5 \Rightarrow x^3-5=0 \quad f(x)=x^3-5$$

نفرض فترة اختيارية ولتكن $[1,2]$

$$f(1)=1-5=-4 \quad , \quad f(2)=8-5=3$$

$$f(1).f(2)<0$$

وهذا يعني أنه يوجد جذر للمعادلة $f(x)=0$ في الفترة $[1,2]$

$$c_0=\frac{a_0+b_0}{2}=\frac{1+2}{2}=1\tfrac{1}{2} \quad , \quad f(1\tfrac{1}{2})=-1.625$$

$$\Rightarrow f(c_0)\,f(b)<0$$

(4)

∴ الجذر يقع في الفترة ~~[1.5~~ [1.5 , 2]

∴ $C_1 = \frac{1.5+2}{2} = 1.75$

$f(C_1) = f(1.75) = 0.359375$

$\Rightarrow f(1.5) \cdot f(1.75) < 0$

i.e $f(C_0) \cdot f(C_1) < 0$

∴ الجذر يقع في الفترة $[1.5 , 1.75]$

... وهكذا نستمر في خطوات الحل ونكون الجدول التالي

| $n$ | $C_n$ | $f(C_n)$ |
|---|---|---|
| ⋮ | | |
| 9 | 1.709960938 | -0.00013166 |
| ⋮ | | |
| 14 | 1.70991456 | 0.00013605 |
| → 15 | 1.709976197 | 0.000002196 |
| 16 | 1.70968563 | -0.00006473 |

من الجدول نجد أن $C_{15} \approx 1.70998$ لأن $f(C_{15}) = 0.00000$

∴ الجذر التكعيبي التقريبي للعدد 5 هو

$p = C_{15} \approx 1.70998$

وتكون القيمة الحقيقية هي 1.7099762

نلاحظ أن طريقة التنصيف بطيئة في التقارب حيث بلغت عدد التكرارات 15 تكرار

طريقة نيوتن رافسون :-

(1) المناقشة

طريقة نيوتن رافسون

من أهم الطرق العددية المستخدمة في إيجاد جذور المعادلة $f(x)=0$ طريقة نيوتن نظراً لاتساع انتشارها.

لكي نتعرف على أسلوب تلك الطريقة يمكن الاستعانة بكثيرة حدود تيلور حيث $f\in C^n[a,b]$

و $f^{(n+1)}$ لها وجود على الفترة $[a,b]$

ونفرض $x_0\in[a,b]$ ولكل $x\in[a,b]$ يوجد $\xi(x)$ بين $x, x_0$ لذا

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

$$P_n(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n$$

$$= \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K$$

وأن

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi(x))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$$

كثيرة الحدود $P_n(x)$ تسمى كثيرة حدود تيلور من الدرجة $n$ للدالة $f$ حول $x_0$ ، $R_n(x)$ يسمى الحد الباقي أو الجزء المقطوع المرتبط بـ $P_n(x)$ ويكون

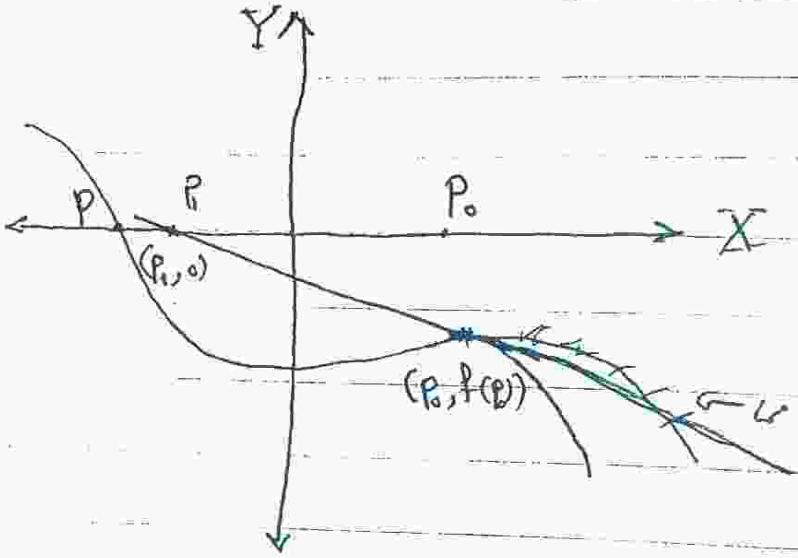
$\lim_{n\to\infty} P_n(x) = \lim_{n\to\infty} \sum_{K=0}^{n} \frac{f^{(K)}(x_0)}{K!}(x-x_0)^K$ يسمى بمتسلسلة تيلور للدالة $f$ حول $x_0$

أو يمكن الاستعانة برسم المنحنى للدالة $y=f(x)$ حيث $p$ جذر المعادلة $f(x)=0$ لأنها نقطة تقاطع المنحنى مع محور السينات ، $p_0$ القيمة التقريبية الابتدائية للجذر $p$ ونفرض أن $p_1$ نقطة تقاطع مماس المنحنى عند النقطة $(p_0, f(p_0))$ مع محور السينات نجد الرسم في هذه الحالة

(2)

حيث $P_0$ أقرب من $P_0$ للجذر المضبوط $P$ وحيث أن ميل المستقيم الواصل بين $(P_0, f(P_0))$ ، $(P_1, 0)$ هو

$$M = \frac{0 - f(P_0)}{P_1 - P_0} = \frac{-f(P_0)}{P_1 - P_0} \longrightarrow \boxed{1}$$




ونظراً لأن ذلك المستقيم هو مماس للمنحنى $y = f(x)$ عند النقطة $(P_0, f(P_0))$ إذاً

$$\therefore M = f'(x) = f'(P_0) \longrightarrow \boxed{2}$$

نلاحظ من $\boxed{1}$ ، $\boxed{2}$ الآتي :

$$f'(P_0) = -\frac{f(P_0)}{P_1 - P_0}$$

$$f'(P_0)\,[P_1 - P_0] = -f(P_0)$$

$$\therefore P_1 - P_0 = -\frac{f(P_0)}{f'(P_0)} \Rightarrow P_1 = P_0 - \frac{f(P_0)}{f'(P_0)}$$

$$P_n = P_{n-1} - \frac{f(P_{n-1})}{f'(P_{n-1})}$$ وتكون في الحالة العامة $; n = 1, 2, 3, \ldots$

العلاقة الأخيرة تسمى طريقة نيوتن لإيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$

**مثال**: باستخدام طريقة نيوتن أوجد $\sqrt[3]{2}$ مقرب إلى (4 dp) عندما $p_0 = 1$ ؟

**الحل**:

$$\because x = \sqrt[3]{2} = 2^{1/3} \Rightarrow x^3 = 2$$

$$x^3 - 2 = 0 \Rightarrow f(x) = x^3 - 2$$

$$f'(x) = 3x^2$$

$$\therefore f(p_0) = f(1) = -1$$

$$f'(p_0) = f'(1) = 3$$

$$\because p_1 = p_0 - \frac{f(p_0)}{f'(p_0)}$$

$$\therefore p_1 = 1 - \frac{-1}{3} = 1.3333$$

$$\because f(p_1) = f(1.3333) = 0.3702$$

$$f'(p_1) = f'(1.3333) = 5.3331$$

$$\therefore p_2 = p_1 - \frac{f(p_1)}{f'(p_1)} = 1.3333 - \frac{0.3702}{5.3331} = 1.2639$$

$$f(p_2) = f(1.2639) = 0.0190$$

$$f'(p_2) = f'(1.2639) = 4.7923$$

$$p_3 = p_2 - \frac{f(p_2)}{f'(p_2)} = 1.2639 - \frac{0.0190}{4.7923} = 1.2599 \leftarrow$$

$$f(p_3) = f(1.2599) = -0.0001$$

$$f'(p_3) = f'(1.2599) = 4.7620$$

$$\therefore p_4 = p_3 - \frac{f(p_3)}{f'(p_3)} = 1.2599 - \frac{-0.0001}{4.7620} = 1.2599 \leftarrow$$

$$\because p_3 = p_4 = 1.2599$$

$$\therefore \sqrt[3]{2} \approx 1.2599 \quad (4\ d.s.)$$

نلاحظ: أن هذه الطريقة سريعة التقارب وهي ميزة خاصة بطريقة نيوتن.

(4)

تمارين

① باستعمال طريقة نيوتن أوجد حل المعادلة $\sin 3x = \cos 2x$
لأقرب (5 d.p.) ، $P_0 = 0$ .

② حل المعادلة $e^{-x} = x$ لأقرب (5 d.p.) بداية من $P_0 = 0$ :

③ باستخدام طريقة نيوتن أوجد $\sqrt[3]{7}$ (4 d.p.) باستخدام
$P_0 = 2$ ؟ .

$f(x) = \sin 3x - \cos 2x$

$f'(x) = 3\cos 3x + 2\sin 2x$

$f(0) = -1 \quad f'(0) = 3$

$\therefore P_1 = 0 + \frac{1}{3} = 0.33333$

$f(0.33333) = -0.98248$

$f'(0.33333) = 3.02282$

$P_2 = 0.33333 + \frac{0.98248}{3.02282} = 0.65835$

$f(0.65835) = -0.96527$

$f'(0.65835) = 3.04418$

$P_3 = 0.65835 + \frac{0.96527}{3.04418} \simeq 0.97545$

٣٣

# ١) الاستيفاء Interpoletion

تعريف: الاستيفاء هي الطريقة التي تعطينا قيم $f(x)$ للقيم الواقعة بين قيم $x$ المعطاة في الجدول

تعريف: القيم المحسوبة هي القيم المجدولة لـ $f(x)$ والتي أخذت في هذه العمليات

* نظرية الاستيفاء الخطي:

لتقريب قيمة الدالة $f(x)$ عند $x=x_0+rh$ نستخدم القاعدة التالية

$$f(x) \approx P_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0$$

حيث

$$r = \frac{x-x_0}{h} \quad , \quad 0 \le r \le 1$$

مثال (1) استخدام قاعدة الاستيفاء الخطي أوجد قيمة $\ln(7.2)$ ؟

الحل

$$\therefore f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + r[f(x_1) - f(x_0)] \longrightarrow ①$$

$$\because x = 7.2 \Rightarrow f(x) \approx P_1(X) = \ln(7.2) \longrightarrow ②$$

$$\text{Let } x_0 = 7 \Rightarrow f(x_0) = f(7) = \ln(7) = 1.9459 \longrightarrow ③$$

$$\text{Let } x_1 = 7.5 \Rightarrow f(x_1) = f(7.5) = \ln(7.5) = 2.0149 \longrightarrow ④$$

$$\therefore r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{7.2-7}{7.5-7} = 0.4 \longrightarrow ⑤$$

وبالتعويض من ②، ③، ④، ⑤ في ① ينتج

$$f(x) \approx f(7) + 0.4[2.0149 - 1.9459]$$

$$\therefore \ln(7.2) \approx 1.9459 + 0.4[2.0149 - 1.9459] = 1.9735$$

** الاستيفاء التربيعي:

تعريف: الاستيفاء التربيعي هو عبارة عن تقريب منحنى الاقتران والدالة $f(x)$ بين $x_0$، $x_2 = x_0 + 2h$ بمعادلة تربيعية تمر بالنقاط

$$(x_0, f(x_0)) \,,\, (x_1, f(x_1)) \,,\, (x_2, f(x_2))$$

والقاعدة هي:

$$f(x) \approx P_2(x) = f(x_0) + r\Delta f(x_0) + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f(x_0)$$

$$r = \frac{x - x_0}{h} \quad ; 0 \le r \le 1$$

٩٢

ع. مستخدما قاعدة الأستكمال التربيعي أوجد قيمة $\ln(7.2)$ ؟

الحل

$\ln(7) = 1.9459$ , $\ln(7.5) = 2.0149$ , $\ln(8) = 2.0794$

$f(x) \simeq f(x_0) + r\,\Delta f(x_0) + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f(x_0)$ ⟶ (1)

$\because x_0 = 7 \Rightarrow f(x_0) = f(7) = \ln(7) = 1.9459$

$\therefore r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{7.2 - 7}{7.5 - 7} = 0.4$

| $x$ | $f(x)$ | $\Delta$ | $\Delta^2$ |
|---|---|---|---|
| 7 | 1.9459 | | |
| | | 0.0690 | |
| 7.5 | 2.0149 | | -0.0045 |
| | | 0.0645 | |
| 8 | 2.0794 | | |

من الجدول نجد أن

$\Delta f(x_0) = 0.0690$ , $\Delta^2 f(x_0) = -0.0045$

وبالتعويض في (1) نجد أن

$\ln(7.2) \simeq 1.9459 + (0.4)(0.0690) + \frac{0.4(0.4-1)}{2}(-0.0045)$

$\simeq 1.974$ .

* ملاحظة. الصورة العامة لقاعدة الفروق الأمامية للأستكمال الخطي هي

$f(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \cdots + \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!}\Delta^n f_0$

حيث $x = x_0 + rh$ , $r = \frac{x - x_0}{h}$ ; $0 \le r \le 1$

سؤال: إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ وأن $x = 1(0.05)1.30$ كون جدول الفروق الأمامية ثم من الجدول احسب قيمة $\sqrt{1.01}$ مستخدما قاعدة الفروق الأمامية للأستكمال ؟

الحل

$\because f(x) = f_0 + r\Delta f_0 + \frac{r(r-1)}{2!}\Delta^2 f_0 + \frac{r(r-1)(r-2)}{3!}\Delta^3 f_0$ ,

$x_0 = 1$ , $f(x_0) = \sqrt{1} = 1$

$\Delta f_0 = 0.02470$ , $\Delta^2 f_0 = -0.00059$ , $\Delta^3 f_0 = 0.00005$

$r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{1.01 - 1}{0.05} = \frac{1}{5}$

العلاقة العامة لإيجاد صيغة نيوتن للفروق الأمامية

$$f(x) = y_0 + \frac{(x - x_0)}{h} \Delta y_0 + \frac{\frac{(x-x_0)}{h}\left(\frac{(x - x_0)}{h} - 1\right)}{2!} \Delta^2 y_0 + \cdots$$

مثال: اوجد صيغة نيوتن للفروق الأمامية للنقاط التالية

(2, 8), (4, 20), (6, 40), (8, 68)

الحل

| x | f(x) | $\Delta f$ | $\Delta^2 f$ | $\Delta^3 f$ |
|---|---|---|---|---|
| 2 | 8 | | | |
| | | +12 | | |
| 4 | 20 | | 8 | |
| | | 20 | | 0 |
| 6 | 40 | | 8 | |
| | | 28 | | |
| 8 | 68 | | | |

$y_0 = 8$ ; $h = 2$ من الجدول نجد أن

$x_0 = 2$ , $y_0$ , $\Delta y_0 = 12$ , $\Delta^2 y_0 = 8$

$$y(x) = 8 + \frac{(x-2)}{2}(12) + \frac{(x-2)}{2}\left[\frac{(x-2)}{2} - 1\right]\frac{8}{2}$$

$$y(x) = x^2 + 4$$

وهي الصيغة النيوتنية المطلوبة

## الاستيفاء Interpolation

الاستيفاء هي الطريقة التي تعطينا قيم $f(x)$ للقيم الواقعة بين قيم $x$ المعطاة في الجدول

تعريف: القيم الجيوبية هي القيم المجدولة لـ $f(x)$ والتي استخدمت في هذه العملية

* نظرية الاستيفاء الخطي:

لتقريب قيمة الدالة $f(x)$ عند $x = x_0 + rh$ نستخدم القاعدة التالية

$$f(x) \approx P_1(x) = f_0 + r(f_1 - f_0) = f_0 + r\Delta f_0$$

حيث $r = \frac{x - x_0}{h}$ , $0 < r \le 1$

مثال (1) استخدم قاعدة الاستيفاء الخطي أوجد قيمة $Ln(7.2)$ ؟

الحل

$$\because f(x) \approx P_1(x) = f(x_0) + r[f(x_1) - f(x_0)] \longrightarrow (1)$$

$$\because x = 7.2 \Rightarrow f(x) \approx P_1(x) = \ln(7.2) \longrightarrow (2)$$

$$\text{let } x_0 = 7 \Rightarrow f(x_0) = f(7) = \ln(7) = 1.9459 \longrightarrow (3)$$

$$\text{let } x_1 = 7.5 \Rightarrow f(x_1) = f(7.5) = \ln(7.5) = 2.0149 \longrightarrow (4)$$

$$\therefore r = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} = \frac{7.2 - 7}{7.5 - 7} = 0.4 \longrightarrow (5)$$

وبالتعويض من (2) ، (3) ، (4) و(5) في (1) ينتج

$$f(x) \approx f(7) + 0.4[2.0149 - 1.9459]$$

$$\therefore Ln(7.2) \approx 1.9459 + 0.4[2.0149 - 1.9459] = 1.9735$$

** الاستيفاء التربيعي:

تعريف: الاستيفاء التربيعي هو عبارة عن تقريب منحنى الاقتران الدالة $f(x)$ بين $x_0$ ، $x_2 = x_0 + 2h$ بمعادلة تربيعية تمر بالنقاط

$$(x_0, f(x_0)), (x_1, f(x_1)), (x_2, f(x_2))$$

والقاعدة هي:

$$f(x) \approx P_2(x) = f(x_0) + r\Delta f(x_0) + \frac{r(r-1)}{2}\Delta^2 f(x_0)$$

$$r = \frac{x - x_0}{h} \quad ; 0 < r \le 1$$

استعمال الفروق :

* الصيغة العددية للمشتقة الأولى بدلالة Δ ، الفروق الأمامية

$$D(f(x)) = f'(x) = \frac{1}{h}\left[\Delta f - \frac{1}{2}\Delta^2 f + \frac{1}{3}\Delta^3 f - \dots\right]$$

مثال :

إذا أعطيت لدينا البيانات التالية

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
| $y$ | 0 | 3 | 8 | 15 | 24 |

فأوجد المشتقة الأولى $Dy_0$ أو $f'(x_0)$

الحل : نكون جدول الفروق الأمامية ومن الجدول نجد أن

$h=1$ , $x_0=1$ , $y_0=0$ , $\Delta f_0=3$ , $\Delta^2 f_0=2$ , $\Delta^3 f_0=0 \dots$

وبالتالي

$$Dy_0 = f'(x_0) = \frac{1}{h}\left[\Delta f_0 - \frac{1}{2}\Delta^2 f_0 + \frac{1}{3}\Delta^3 f_0 - \dots\right]$$

$$\therefore Dy_0 = f'(x_0) = \frac{1}{1}\left[3 - \frac{1}{2}(2) + \frac{1}{3}(0) - 0 + 0\right] = 2$$

* التكامل العددي :

* قاعدة شبه المنحرف :

$$I_T = \int_a^b f(x)\,dx = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_n + 2\sum_{i=1}^{n-1} f_i\right]$$

وهي المساحة تحت المنحنى للدالة $f(x)$ في الفترة $[a,b]$ ونلاحظ وجود خطأ وللتقليل من هذا الخطأ نقسم هذه الفترة إلى أكبر عدد من الفترات الجزئية ويكون مقدار الخطأ صغير جداً عندما $n$ تكون كبيرة جداً حيث $h=\frac{b-a}{n}$

مثال : باستخدام طريقة شبه المنحرف أوجد $\int_4^{5.2} \ln x\,dx$ آخذاً $n=6$ مقرباً (6 DP) ؟

الحل : $\because n=6$ , $f(x)=\ln x$ , $a=4$ , $b=5.2$

$$\therefore h = \frac{b-a}{n} = \frac{5.2-4}{6} = 0.2$$

ثم نكون الجدول التالي

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x$ | 4 | 4.2 | 4.4 | 4.6 | 4.8 | 5 | 5.2 |
| $f(x)$ | 1.386294 | 1.435085 | 1.481605 | 1.526056 | 1.568616 | 1.609438 | 1.648654 |

الآن نطبق القانون

$$I_T = \frac{0.2}{2}\left[1.386294 + 1.648654 + 2(1.435085 + 1.48165 + 1.52656 + 1.568616 + 1.609438)\right] = 1.827655$$

٧ قاعدة سمبسون لإيجاد التكامل العددي

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_n + 4\sum_{i=1,3,\dots}^{n-1} f_i + 2\sum_{i=2,4,\dots}^{n-2} f_i\right]$$

حيث $n$ عدد زوجي.

مثال: أوجد قيمة $I = \int_0^{0.6} e^{-x^2}\,dx$ باستخدام $h=0.1$ باستخدام

(i) طريقة سمبسون؟ (ii) طريقة شبه المنحرف؟ مستخدماً (DS)

الحل (i): $f(x) = e^{-x^2}$ , $h = 0.1$ , $b = 0.6$ , $a = 0$ ∴

$$\therefore n = \frac{b-a}{h} = \frac{0.6-0}{0.1} = 6$$

ثم نكون الجدول التالي

| $x$ | 0 | 0.1 | 0.2 | 0.3 | 0.4 | 0.5 | 0.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | 1 | 0.990050 | 0.960789 | 0.913931 | 0.852144 | 0.778801 | 0.697676 |

من الجدول نوجد:

$$I_S = \frac{h}{3}\left[f_0 + f_6 + 4(f_1+f_3+f_5) + 2(f_2+f_4)\right]$$
$$= 0.535156$$

حل (ii)

$$I_T = \frac{h}{2}\left[f_0 + f_6 + 2(f_1+f_2+f_3+f_4+f_5)\right]$$
$$= 0.534455$$

مثال: من الجدول التالي.

| $x$ | 1 | 1.1 | 1.2 | 1.3 | 1.4 | 1.5 | 1.6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y$ | 0.8012 | 0.7614 | 0.7119 | 0.6837 | 0.6226 | 0.5993 | 0.5412 |

أوجد $I = \int_1^{1.6} (x^2+y^2)\,dx$ باستخدام قاعدة سمبسون؟

∴ بما أن التكامل هو $x^2+y^2$ نضيف الصف الثالث للجدول

| | $f_0$ | $f_1$ | $f_2$ | $f_3$ | $f_4$ | $f_5$ | $f_6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2+y^2$ | 1.6419 | 1.7897 | 1.9468 | 2.1574 | 2.3476 | 2.6692 | 2.8529 |

$$\therefore I_S = 1.3103.$$